Corrigé

8 Suites : calculs de moyennes et somme des termes

Prof

1. Suites arithmétiques : rappels, applications

Propriété 8.1 Rappels sur les suites arithmétiques.
Ce sont des suites pour lesquelles on obtient chaque terme à partir du précédent en **ajoutant toujours le même nombre** r. On a :

- Définition par récurrence (chaque terme en fonction du précédent) : $u_{n+1} = u_n + r$
- Définition explicite (chaque terme en fonction de n) : $u_n = u_0 + n \times r$

Exercice 8.1 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

   $u_1 = 2 + 3 = 5$
   $u_2 = 5 + 3 = 8$
   $u_3 = 8 + 3 = 11$

2. Exprimer le terme u_n en fonction de n.

   $u_n = 2 + n \times 3$

3. En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50}

   $u_{20} = 2 + 20 \times 3 = 2 + 60 = 62$
   $u_{50} = 2 + 50 \times 3 = 2 + 150 = 152$

Exercice 8.2 Sophia place un capital initial $C_0 = 3000$ € à un taux annuel de 6%, à **intérêts simples**, c'est-à-dire que chaque année elle gagne 6% *du capital initial placé.*

1. Calculer 6% de 3000 € : c'est la somme que Sophia gagne chaque année.

   $0{,}06 \times 3000 = 180$ €

2. On note C_n la somme totale sur le compte au bout de n années. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

   $C_{n+1} = C_n + 180$

3. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.

$C_n = C_0 + n \times r$

$C_n = 3000 + n \times 180$

4. De quel capital Sophia disposera-t-elle au bout de 10 ans ?

$C_{10} = 3000 + 10 \times 180 = 3000 + 1800 = 4800$ €

5. Au bout de combien d'années le capital initial de Sophia (3000€) aura-t-il doublé ?

$3000 + n \times 180 = 6000 \iff n \times 180 = 3000 \iff n = \frac{3000}{180} \simeq 16{,}67$

Ce sera au bout de 17 ans.

6. Au bout de combien d'années le capital de Sophia dépassera-t-il 10 000 € ?

$3000 + n \times 180 \geq 10\,000$

$\iff n \times 180 \geq 10\,000 - 3000$

$\iff n \times 180 \geq 7000$

$\iff n \geq \frac{7000}{180}$

$\iff n \geq 38{,}88$

Ce sera au bout de 39 ans.

Définition 8.1 On appelle **moyenne arithmétique** de deux nombres a et b la grandeur

$$\frac{a+b}{2}$$

Exercice 8.3 Un automobiliste roule pendant 1 heure à la vitesse de $\underbrace{90km/h}_{V_1}$, puis pendant encore une heure à la vitesse de $120km/h$.) V_2
Pour faire la même distance, en une heure, mais à vitesse constante, à quelle vitesse aurait-il fallu qu'il roule ?

90 km — 1 h ; 120 km — 1 h

$D = 120 + 90 = 210$ km, $T = 2$ h,

$V = \frac{D}{T} = \frac{210}{2} = 105$ km/h $= \frac{V_1 + V_2}{2}$

Propriété 8.2 La somme de n termes consécutifs d'une **suite arithmétique** se calcule comme suit :

$$S = (\text{Nombre de termes de la somme}) \times \frac{\text{1er terme de la somme + dernier terme de la somme}}{2}$$

On note par exemple la somme des termes u_0 à u_{10} :
$S = \sum_{n=0}^{10} u_n = 11 \times \left(\frac{u_0 + u_{10}}{2}\right)$

Exercice 8.4 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 19$ et de raison $r = 5$.
Déterminer $S = \sum_{n=0}^{10} u_n$

$S = 11 \times \left(\frac{u_0 + u_{10}}{2}\right)$ où $u_{10} = u_0 + 10r = 19 + 5 \times 10 = 19 + 50 = 69$

$S = 11 \times \left(\frac{19 + 69}{2}\right) = 484$

Exercice 8.5 En ce début d'année, Rémi a pris de bonnes résolutions : il a décidé d'arrêter de fumer. il fume 140 cigarettes par semaine et va réduire progressivement sa consommation hebdomadaire de 4 cigarettes chaque semaine.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par une suite arithmétique.

On soustrait toujours 4, ce qui revient à ajouter -4.

$u_{n+1} = u_n + \underbrace{(-4)}_{r}$

2. On note (u_n) cette suite. En déterminer le premier terme u_0 et la raison.

$u_0 = 140$

$r = -4$

3. Combien de cigarettes Rémi fume-t-il après 5 semaines d'efforts ?

$u_5 = u_0 + 5 \times r = 140 + 5 \times (-4) = 140 - 20 = 120$

4. Au bout de combien de semaines aura-t-il complètement arrêté la cigarette ?

$u_n = 0 \iff u_0 + n \times r = 0 \iff 140 + n \times (-4) = 0$

$\iff n \times (-4) = -140 \iff n = \frac{-140}{-4} = 35$

Il aura arrêté au bout de 35 semaines.

5. Entre le moment où Rémi a décidé de faire des efforts et le moment où il a enfin arrêté de fumer, combien de cigarettes aura-t-il fumé en tout ?

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{35} = 36 \times \left(\frac{u_0 + u_{35}}{2}\right)$

$= 36 \times \left(\frac{140 + 0}{2}\right) = 36 \times 70 = 2520$ cigarettes

Exercice 8.6 Un nouveau parking souterrain vient d'ouvrir en centre-ville. Le premier jour de son exploitation, on constate une fréquentation de 350 voitures. On prévoit une augmentation du passage dans ce parking de 10 voitures supplémentaires chaque jour.

1. Quelle est le total des voitures qui sont passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

$u_0 = 350$; $u_{n+1} = u_n + 10$ $(r = 10)$; $u_6 = u_0 + 6 \times r = 350 + 60 = 410$

$\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_6}_{7 \text{ jours}} = 7 \times \left(\frac{u_0 + u_6}{2}\right)$

$= 7 \times \left(\frac{350 + 410}{2}\right) = 2660$

2. Le parking peut accueillir un total de 1 500 voitures. Au bout de combine de temps est-il saturé ?

$u_n = 1500 \iff u_0 + n r = 1500 \iff 350 + 10n = 1500$

$\iff 10n = 1500 - 350 = 1150 \iff n = 115$, il sera saturé au bout de 115 jours (ou 116)

$S = 24 \times \frac{1+24}{2} = 24 \times \frac{25}{2}$

3. Le coût de stationnement d'une voiture est en moyenne de 8 € par jour. Combien la société exploitant ce parking aura-t-elle gagné quand le parking sera à saturation ?

$u_0 + \dots + u_{115} = 116 \times \left(\frac{u_0 + u_{115}}{2}\right) = 116 \times \left(\frac{350 + 1500}{2}\right)$

$= 107\,300$ voitures

Prix de revient : $107300 \times 8 = 858\,400$

2. Suites géométriques : rappels, applications

Propriété 8.3 Rappels sur les suites géométriques.
Ce sont des suites pour lesquelles on obtient chaque terme à partir du précédent en **multipliant toujours par le même nombre** q. On a :

- Définition par récurrence (chaque terme en fonction du précédent) : $u_{n+1} = u_n \times q$
- Définition explicite (chaque terme en fonction de n) : $u_n = u_0 \times q^n$

Exercice 8.7 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = 3 \times 2 = 6$

$u_2 = 6 \times 2 = 12$

$u_3 = 12 \times 2 = 24$

2. Exprimer le terme u_n en fonction de n.

$u_{n+1} = u_n \times q$, $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

3. En déduire les valeurs de u_7, u_{11} et u_{19}

$u_7 = 3 \times 2^7 = 384$

$u_{11} = 3 \times 2^{11} = 6144$

$u_{19} = 3 \times 2^{19} = 1\,572\,864$

Exercice 8.8 La population actuelle augmente de 1% par an.
En 2010, elle était de 6,6 milliards. On note u_n la population mondiale de l'année $2010 + n$.

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique. Préciser son premier terme u_0 et sa raison q.

$u_{n+1} = u_n \times 1{,}01$, on multiplie toujours par le même nombre : géométrique

$\begin{cases} u_0 = 6{,}6 \\ q = 1{,}01 \end{cases}$

2. Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 \times q^n = 6,6 \times 1,01^n$

3. En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025.

$u_{15} = 6,6 \times 1,01^{15} = 7,662395 \simeq 7,66$ milliards

4. A l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints.

$u_{31} \simeq 8,93$; $u_{32} \simeq 9,07$

Les 9 milliards seront atteints en 2042

Définition 8.2 On appelle **moyenne géométrique** de deux nombres a et b la grandeur

$$\sqrt{a \times b}$$

Exercice 8.9 Dans un pays, au mois de janvier, les pris ont augmenté de $0,9\%$ puis en février de $1,2\%$. Si l'augmentation avait été la même en janvier et en février, de combien aurait-elle dû être pour obtenir la même augmentation globale des prix au bout de ces deux mois ? (passer aux coefficients multiplicateurs)

$CM_1 = 1,009$ $CM_2 = 1,012$

$CM_3 = 1,009 \times 1,012 = 1,0211$

CM CM

$CM_3 = CM^2$

$CM = \sqrt{CM_3} = \sqrt{CM_1 \times CM_2} = \sqrt{1,0211}$

$\simeq 1,01049 \simeq 1,01$ (augmentation de 1%)

Propriété 8.4 La somme de n termes consécutifs d'une **suite géométrique** se calcule comme suit :

$$S = \text{Premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes de la somme}}}{1 - q}$$

On note par exemple la somme des termes u_0 à u_{10} :
$S = \sum_{n=0}^{10} u_n$

Exercice 8.10 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{9}$ et de raison $q = 3$.
Déterminer $S = \sum_{n=0}^{8} u_n$

$S = u_0 \times \dfrac{1 - 3^9}{1 - 3} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1 - 3^9}{(-2)} = \dfrac{9841}{9} \simeq 1093,444$

Exercice 8.11 Une horloge sonne toutes les heures, de 1 coup à 1 heure du matin à 24 coups à minuit. Quel est le nombre total de coups de cloches entendu en 24h ?

$u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$ ... $u_{24} = 24$

Suite $\boxed{\text{arithmétique}}$, $u_1 = 1$ et $r = 1$

$S = u_1 + \dots + u_{24} = 24 \times \left(\frac{1+24}{2}\right)$

$= 300$

Exercice 8.12 Nous avons tous 2 parents, 4 grands-parents, 8 arrière-grands-parents, etc... En supposant que nous appartenons à la génération 1, que nos parents sont la génération 2 , nos grands-parents la génération 3, etc..

1. Combien d'ancêtres composent la génération 10 ?

   $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = u_n \times 2^{q}$, $u_n = u_1 \times q^{\boxed{n-1}}$

   $u_{10} = u_1 \times 2^{\boxed{9}} = 1 \times 2^9 = \boxed{512}$

2. Si on pouvait remonter jusqu'en l'an 1000, soit environ 40 générations, combien y aurait-il d'individus au total sur l'arbre généalogique (de la 1ère génération, nous, jusqu'à la 40° génération comprise) ? Que pensez-vous de ce résultat ?

   $u_1 + u_2 + \dots + u_{40} = u_1 \times \frac{1-2^{40}}{1-2} = 1 \times \frac{1-2^{40}}{1-2}$

   $= \boxed{1\,099\,511\,627\,775} \simeq 1 \times 10^{12}$ individus,

   soit un billion d'individus, plus d'individus qu'il n'y en a sur la planète (8 milliards)

Exercice 8.13 Sophia adécidé de changer de banque. A nouveau, elle place un capital initial $C_0 = 3000$ € à un taux annuel de 6%, mais cette fois à **intérêts composés**, c'est-à-dire que chaque année elle gagne 6% *de la totalité de la somme présente sur son compte, intérêts précédents compris.*

1. A quel coefficient multiplicateur correspond une augmentation de 6% ?

   $c_m = \boxed{1{,}06}$

2. On note C_n la somme totale sur le compte au bout de n années. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

   $C_{n+1} = \boxed{C_n \times 1{,}06}$

3. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.

   $C_n = \boxed{C_0 \times 1{,}06^n} = \boxed{3000 \times 1{,}06^n}$

4. De quel capital Sophia disposera-t-elle au bout de 10 ans ?

   $C_{10} = 3000 \times 1{,}06^{10} = \boxed{5372{,}543}$ € (vs. 4800 € en intérêts simples)

5. Au bout de combien d'années le capital initial de Sophia (3000€) aura-t-il doublé ?

$C_n = 6000$; À la calculatrice : $C_{11} = 5\,694{,}896$,

$C_{12} = 6036{,}589$

Son capital aura doublé au bout de $\boxed{12 \text{ ans}}$ (Vs 17 ans en intérêts simples)

6. Au bout de combien d'années le capital de Sophia dépassera-t-il 10 000 € ?

$C_n = 10\,000$; À la calculatrice : $C_{20} = 9621{,}606$

$C_{21} = 10\,198{,}69$

Son capital dépassera 10000 € au bout de $\boxed{21 \text{ ans}}$ (Vs 39 ans en intérêts simples)